Economic Bulletin of Senshu University
Vol.44, No.3, 109-132., 2010

利子率期間構造と債券価格*

中島　巖

序

利子率の期間構造に関する最初期の議論は，19世紀末のFisher［13］の不偏期待仮説（unbiased expectations hypothesis）である。一ケ月ものの債券の一ケ月先の期待直物レートが，一ケ月ものの一ケ月先の先物レートに均等化するように投資家は債券価格を設定すると理論づけられる。

20世紀に入って1940年に，Lutz［22］は，短期利子率と長期利子率の間の関係が将来の短期利子率に関する予想（expectations）に依存すると理論づける期待理論（expectations theory）を唱えた。上のFisherの仮説の発展化の要素を含む期待理論は，ある債券と他の任意の債券とが市場において完全譲渡性（complete shiftability）をもち，市場は単一（single）なそれとなるとみなす。しかるに，かかる予想が実現値と乖離するとき予想が誤りであったと結論しなければならなくなる。それから20年後，Meiselman［23］は，かかる不都合を回避すべく誤差修正型の予想形成過程を導入する形で期待理論の補強を試みた。（Lutzの期待理論，Meiselmanの仮説のそれぞれの展望として，Dodds＝Ford［10］(Chap 2, 3）参照。）

Hicks［16］,［17］は，上の完全譲渡性，すなわち完全代替性は固より存在し得ないものであるが，流動性プレミアム（liquidity premium）と呼ばれる対価の支払いがなされるところでは完全代替性も実現可能であるとする流動性プレミアム理論（liquidity premium theory）を唱えた。流動性プレミアムは，Keynesが商品先物市場に適用したアイディアに発しているごとくである。同理論の根底には，本来的に貸手は長期貸付契約を好まない性向をもつとする前提が置かれている。したがって，貸手の長期契約に対する負の性向を帳消しにする要因として流動性プレミアムを適用することが要請されてくる。（流動性プレミアム理論に関する展望として，Dodds＝Ford, *op. cit.*, Chap. 5, 参照。）

しかるに，Culbertson［6］,［7］は，投資家の行動は予想（expectations）に影響されることなどなく，専ら自らの債務構造から決まってくる満期範囲に対する習慣的嗜好に左右されるとするヘッジング圧力理論（hedging pressure theory）を唱えた。そこでは，契約義務の遂行を可能にする

*）本稿では，債務不履行危険の可能性は予め排除されていることに注意されたい。

完全ヘッジ･ポジションを確保せんとする気持が圧力として行動に作用するとされる。例えば，長期に寄った責務構造の下では長期の期間構造が選択されるごとく，責務構造と期間構造をマッチさせる戦略が支配的となり，さらに，投資家が完全ヘッジの確保にのみ汲汲とするところでは，リスク取りは敬遠され，安全第一（safety-first）の行動が支配的となることになる。かかる理論づけは，予想を最重視する期待理論のそれの対極に位置するものとなる。（ヘッジング圧力理論の展望として Dodds＝Ford, *op. cit.*, Chap. 6，参照。また，上の諸理論の比較対比の試みとして，Buse［2］，確率過程の文脈における同様の試みとして，Cox＝Ingersoll, Jr.＝Ross［4］参照。）

ところで，これまでの期間構造をめぐる議論は，投資家の選好が，専ら収益率（rates of return）にのみ及ぶ形で展開されてきた。1970年代に入ると，Roll［30］，Long, Jr.［20］,［21］，さらに Black＝Scholes［1］は，消費財に対する選好をも含む資本資産価格モデル（capital asset pricing model）の枠組に債券を取込みポートフォリオ選択の対象として扱った。ポートフォリオ選択の過程の適用は，債券価格を利子率のタームで評価づけることを可能にした。

近年，Merton［25］, Black＝Scholes, *op. cit.*, が用いた確率解析（stochastic calculus）の手法の適用によって，確率過程にしたがう利子率直物レートと債券価格が完全相関関係に立つところで，ポートフォリオ選択を通じて，債券価格期間構造方程式(および債券価格フォーミュラ)が，直物レートの函数の形で導かれるようになる。（例えば，Vasicek［32］, Richard［29］, Dothan［11］，Cox＝Ingersoll, Jr.＝Ross［5］，Heath＝Jarrow＝Morton［14］,［15］，Dai＝Singleton［15］等参照。）しかるに，Dothan, *op. cit.*, は，利子率直物レートがドリフト係数なしの連続的な拡散過程（diffusion process）にしたがう想定の下で導かれた債券価格期間構造方程式から，さらに債券価格フォーミュラを導くに際して，直接，Fourier 変換（Fourier transform）を適用した。

我々の本稿の目的は，利子率直物レートから債券価格の期間構造方程式(および債券価格フォーミュラ)を導くことにある。まず，次節では，利子率直物レートが離散的確率過程にしたがう場合が想定され，離散的確率解析の数理を概観した後，利子率直物レートが離散的 Marcov 連鎖（Markov chain）にしたがうところでの債券価格期間構造方程式のあり方をみる。第2節では，直物レートがドリフト係数なしの連続的な拡散過程にしたがうところで，ポートフォリオ選択を通じて債券価格期間構造方程式を導き，次いで，熱方程式（heat equation）を介した Fourier 変換を適用することによって債券価格フォーミュラを導く。最後に，若干の結論的言及がなされる筈である。

なお，本稿は最終稿ではない。

第1節　離散的確率過程

1. 離散的確率過程に関する若干の数理――予備的考察

本節では，利子率直物レートが離散型確率過程にしたがうところでの利子率の期間構造をみる。

本項では，予備的考察として，まず，確定的利子率の下で，次いで，確率過程にしたがう不確定利子率の下での期間構造のあり方をみるための準備を行なう[1)]。

一般に，債券（bond）は，資本蓄積，負債構造の再編成等の目的のために政府や企業が発行す

る負債性証券（debt security）であり，約束手形（promissory note）の特性をもつ。株式と異なって，一定の期限を限って発行され，償還（redemption）を以って失効となり流通停止となる。したがって，債券は償還の行使時期（excercise time），償還費用を構成する券面価額（face value），そして償還期限前における利払いとしてのクーポン（coupon）という固有の変量を具えもつ。このとき，利回り（yield）は，その値を異にする債券間の比較を可能にする。

かかるクーポンの中間的支払いの有無に応じて，債券は，非ゼロ・クーポン債（nonzero coupon bond）とゼロ・クーポン債（zero coupon bond）とに区分される。後者においては，券面価額＝1とみなされ，債券自体は割引債（bond with discount）と呼ばれる。

まず，一定の銀行利子率 $r(>0)$ が支配する金融市場を想定しよう。いま，そこで発行，売買される償還期限 T をもつ債券の任意時点 $t(\leq T)$ における市場価格を $B(t, T)$ とすれば，上で示唆したごとく $B(T, T)=1$ であり，また，$B(t, T)<1$ がしたがう。

ここで，券面価額 A をもち，$c_1, c_2, \cdots, c_T$ のクーポンを支払う非ゼロ・クーポン債価格を $B_c(t, T)$ とすれば，時点 $t=0$ における債券利回り $y_c=y_c(0, T)$ は

$$B_c(0, T)=\sum_{k=1}^{T}\frac{c_k}{(1+y_c)^k}+\frac{A}{(1+y_c)^T} \tag{1}$$

なる関係から決定される一種の内部収益率である。このとき，クーポン額はクーポン・レート（coupon rate）r_c の下での券面価額のパーセンテージ $c_k=r_cA$ で与えられる。他方，利回り $y=y(0, T)$ をもつ割引債について，債券価格 $B(0, T)$ と利回りの間の関係

$$B(0, T)=\frac{1}{(1+y)^T} \tag{2}$$

がしたがう。

同様に，$t\leq T$ なる任意の時点 t において，

$$B_c(t, T)=\sum_{k=t+1}^{T}\frac{c_k}{(1+y_c(t, T))^{k-t}} \tag{3}$$

なる関係がしたがう。ただし，券面価額 A は，償還期限 T におけるクーポン額 c_T に含められているものとする。このとき，$y_c(t, T)$ を t 期利回りと呼ぶ。

さらに，時点 $t=0$ において授受される期間 $[0, T]$ にまたがる貸付（loan）の利子率を $r(0, T)$ で表わし，直物レート（spot rate）と呼ぶことにする。このとき，割引債価格 $B(0, T)$ との間に

$$B(0, T)=\frac{1}{(1+r(0, t))^T} \tag{4}$$

なる関係がしたがう。(2)式と(4)式の比較から，$y(0, T)=r(0, T)$ がしたがう。このとき，上の利回り $y(0, T)$ は，利子率の初期構造（initial structure）を与えることになる。

また，期間 $[t, T]$ にまたがる貸付利子率の直物レート $r(t, T)$ について

$$B(t, T)=\frac{1}{(1+r(t, T))^{T-t}} \tag{5}$$

がしたがう。したがって，(3),(5)式から，$t\leq T$ なる t に対して $y(t, T)=r(t, T)$ がしたがう。債券価格，利回り，そして利子率の連関に関して，$t\leq T$ なるすべての t について計算する問題全体は，利子率の期間構造（term structure）と呼ばれる[2)]。

さて，次に，利子率が離散型確率過程にしたがう場合に目を転じよう。

まず，確率空間（probability space）$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を想定する。ただし，Ω は標本・サンプル空間を表わす非空集合であり，離散集合としては標本・サンプルω_iが構成する集合 $\Omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$，連続集合としては，$\Omega=C([0, T])$, $\Omega=C([0, \infty])$ 等が想定される。$\mathcal{F}$は，(i) $\Omega\in\mathcal{F}$，(ii) 事象（events）A に対し，$A\in\mathcal{F}$ならば$A^c\in\mathcal{F}$，(iii) $A_i\in\mathcal{F}$ならば$\bigcup_i A_i\in\mathcal{F}$（加法性）なる3条件を満たす部分$\sigma$-代数（sub σ-algebra）の集合であり，情報集合を構成する。最後に，P は確率測度（probability measure）である。

確率変数 X が可測空間（measurable space）$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の可測函数（measurable function）であるとき，その X を可測化する最小のσ-代数$\sigma(X)$ は，X から生成された情報集合と呼ばれる。

いま，$\mathcal{F}$を時間の集合とすれば，離散集合$\mathcal{F}=\{0, \delta, 2\delta, \cdots, N\delta\}$，閉区間$\mathcal{F}=[0, T]$，半直線$\mathcal{F}=[0, \infty)$ などが想定される。このとき，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で時間毎にランダムな値をとる確率変数族$X=(X_t)_{t\in\mathcal{F}}$を確率過程（stochastic process）と呼ぶ。また，時間とともに増大している情報集合$\mathcal{F}$の部分σ-代数の増大列$(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{F}}$，すなわち，$s\leq t$, $s, t\in\mathcal{F}$なる任意の s, t に対して$\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$を満たすそれを増大情報系（filtration）と呼ぶ。このとき，$\mathcal{F}_t$は，時点 t までに取得された情報と解される。かかる増大情報系を確率空間に付加した空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{F}})$をフィルター付確率空間（probability space with a filtration）と呼ぶ。

もし，確率変数 X_t が増大情報系$\mathcal{F}_{t-1}$に関して可測であれば，X_t は$\mathcal{F}$に関して予測可能（predictable）と呼ばれる。また，$\mathcal{F}_{t-1}\subseteq\mathcal{F}_t$ であるから，このとき，すべての予測可能な確率過程は，適合的（adapted）となる。すなわち，$\mathcal{F}_t$ が所与の下で X_t を知ることができる。

ところで，適合的確率過程 X が，すべての t について

$$E[X_{t+1}\,|\,\mathcal{F}_t]=X_t \tag{6}$$

がしたがうとき，過程 X は，マルチンゲール（martingale）であると呼ばれる。ただし，E は，所与の事象 A の下での離散的確率変数 Y の条件付期待値オペレータである。すなわち，Bayes ルール（Bayes's Law）から

$$P\{Y=y\,|\,A\}=P\{Y=y, A\}/P\{A\} \tag{7}$$

がしたがうから，

$$\begin{aligned} E[Y\,|\,A] &= \sum_y yP\{Y(\omega)=y, A\}/P\{A\} \\ &= \sum_{\omega\in A} Y(\omega)P\{\omega\}/\{A\} \end{aligned} \tag{8}$$

がしたがう。(8)式は，条件付期待値 $E[Y|A]$が条件付確率分布 $P\{Y=y|A\}$のタームで定義されることを示唆している。

N 種類の債券のポートフォリオの取引前の t 期価値を V_t とすれば，V_t は

$$V_t=\begin{cases} H_0(1)B_0+\sum_n H_n(1)S_n(0), & t=0 \\ H_0(t)B_t+\sum_n H_n(t)S_n(t), & t\geq 1 \end{cases} \tag{9}$$

で表わされる。ただし，$H_0(t)$, $H(t)$ $(t=1, \cdots, T)$は，それぞれ各期の預金，ポートフォリオ取引戦略（trading strategy）であり，B_t $(t=0, 1, \cdots, T)$は（銀行）預金残高，$S(t)$ $(t=0, 1, \cdots, T)$は取引収益ないし損失をもたらす価格である。他方，取引後の t 期価値は

$$H_0(t+1)B_t+\sum_n H_n(t+1)S_n(t), \quad t\geq 1 \tag{10}$$

で表わされる。いま，取引前後の価値が等しい，すなわち

$$V_t=H_0(t+1)B_t+\sum_n H_n(t+1)S_n(t) \tag{11}$$

がしたがうとき，取引戦略は資金自己調達的（self-financing）であると呼ばれる。債券価格の取引前後の変化が，その収益ないし損失からのみ生じ，他のルートからの流入，流出が存在しないことが示唆される。さらに，このとき，資金自己調達的戦略の下で(i)　$V_0=0$,(ii)　$V_T=0$,そして，(iii)　$E[V_T]>0$が満たされるならば，裁定機会（arbitrage opportunity）が存在することを意味する。

しかるに，金融理論において，証券価格は絶対価格としてよりも相対価格である方が好都合である。そこで，預金残高をニュメレールとして証券価格を正規化することにする。いま，割引価格（discounted price）$S_n{}^*(t)$

$$S_n{}^*(t)\equiv S_n(t)/B_t, \quad t=0,1,\ldots,T;\ n=1,2,\ldots,N \tag{12}$$

を定義すれば，資金自己調達的戦略の下での均衡式((9)式)は,

$$V_t{}^*\equiv\begin{cases}H_0(1)+\sum_n H_n(1)S_n{}^*(0), & t=0\\ H_0(t)+\sum_n H_n(t)S_n{}^*(t), & t\geq 1\end{cases} \tag{13}$$

と表現し直される。

さて，確率測度Pが，すべての標本･サンプル$\omega\in\Omega$に対し$P(\omega)>0$を与え，債券価格の割引値$S_n{}^*(n=1,\ \cdots,N)$のすべてがPの下でマルチンゲールであるとき，確率測度Pはマルチンゲール測度（martingale measure），あるいは，危険中立確率測度（risk neutral probability measure）と呼ばれる。すなわち，マルチンゲール測度の下での条件付期待値オペレータE_Qに対して

$$E_Q[S_n{}^*(t+s)\,|\,\mathcal{F}_t]=S_n{}^*(t), \quad t,s>0 \tag{14}$$

$$\text{or}\quad E_Q[B_tS_n(t+s)/B_{t+s}\,|\,\mathcal{F}_t]=S_n(t), \quad t,s>0 \tag{15}$$

がしたがう。このとき，マルチンゲール測度の存在性は，裁定機会の非存在性を意味することが帰結される。

もし，確率過程の現在値を所与とするとき，将来が過去と独立である性質をMarkov性（Markov property）と呼ぶ。

いま，増大情報系$(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\cdots,T}$が確率過程$(X_t)_{t=0,1,\cdots,T}$から生成されるものとし，この過程が$t$時点おいて有界集合である状態空間（state space）内の値jをとるとき，$X_t=j(\in E)$で表わし，過程はt時点において状態jにある，という。ここで，情報$\mathcal{F}_t$を確率過程Xの現在値と過去値の推移とみなすとき，確率測度Pの下で，すべての$j\in E$について

$$P\{X_{t+1}=j\ |\mathcal{F}_t\}=P\{X_{t+1}=j\,|\,X_t\} \tag{15}$$

がしたがうならば，確率過程XはMarkov連鎖（Markov chain）と呼ばれる。このとき，すべての$s\geq 1$に対して

$$P\{X_{t+s}=j\ |\mathcal{F}_t\}=P\{X_{t+s})=j\,|\,X_t\} \tag{16}$$

がしたがう。Markov連鎖は，将来値の予測に有効な情報が現在値のみであるような確率過程ということになる。さらに言えば，過程の推移を所与とするとき，現在値さえ確認できれば過去値を無視することができることになる。

ところで，危険証券（risky securities）の中に債券のごとき確定利得証券が混在する状況を扱う証券市場モデルを期間構造モデル（term structure model）と呼ぶ。このとき，それが期間構造モデルたり得るためには，3つの要件が満たされる必要がある。1つは，多期間モデル（multiperiod model）であること，もう1つは，利子率r_tが$t-1$期に既知となるべく予測可能であること，そして，危険証券の中にゼロ・クーポン債ないし割引債の類いが含まれていること，である。

最後に，預金残高B_t, $t=0, 1, \cdots, T$が$B_0=1$，すべての$\omega\in\Omega=(\omega_1, \cdots, \omega_{K<\infty})$に対し，$B_t(\omega)>0$を満たす確率過程であるとき，利子率$r_t$は

$$r_t\equiv(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}>0, \quad t=1, 2, \ldots, T \tag{17}$$

で表わされる。$r_t>0$の仮定は，残高の成長率が正となる時間の増加函数であることを意味する。

以上の準備の下に，次項において，利子率が離散的確率過程にしたがうところで，その期間構造のあり方をみることにする。

2. 離散的確率過程下の期間構造

本項では，利子率が離散的確率過程にしたがうところでのその期間構造のあり方をみる。

さて，$1\leq\tau\leq T$を満たす各τに対し，τを満期（maturity）とするゼロ・クーポン債を想定しよう。満期τの債券の時点tにおける価格$Z^\tau=(Z^\tau_t)_{0\leq t\leq\tau}$は，$Z^\tau_\tau=1$を満たす適合的確率過程となる。期間構造モデルは，$\tau=1, \cdots, T$なるすべての$\tau$に対しゼロ・クーポン債$Z^\tau$を含むものとなるから，各$t$時点において$\{Z^{t+1}_t, Z^{t+2}_t, \cdots, Z^T_t\}$なるゼロ・クーポン債価格の集合が存在することになる。かかる集合は，ゼロ・クーポン債価格の期間構造と呼ばれる。

期間構造モデルは，裁定機会が残る余地を排除するから，ゼロ・クーポン債の割引価格がマルチンゲールとなるようなマルチンゲール測度が存在しなければならないことは前項でみたごとくである。すなわち，すべての標本・サンプル$\omega\in\Omega$に対し$Q(\omega)>0$を与え，すべての満期τに対して

$$Z^\tau_s=E_Q[B_s Z^\tau_t/B_t\,|\,\mathcal{F}_t], \quad 0\leq s\leq t\leq\tau \tag{18}$$

がしたがうような確率測度Qが存在しなければならない。このとき，$r_t=(B_t-B_{t-1})/B_{t-1}$なる関係を想起すれば，$1+r_t=B_t/B_{t-1}$がしたがい，$s\leq t$なる$s, t$に対し

$$\frac{B_t}{B_s}=\frac{B_{t+1}}{B_s}\cdot\frac{B_{t+2}}{B_{t+1}}\cdot\cdots\frac{B_{t-1}}{B_{t-2}}\cdot\frac{B_t}{B_{t-1}}=(1+r_{s+1})(1+r_{s+2})\cdots(1+r_{t-1})(1+r_t) \tag{19}$$

を得る。ここで，$t=\tau$と設定すると，$Z^\tau_\tau=1$を想起すれば，

$$Z^\tau_s=E_0[B_s/B_t\,|\,\mathcal{F}_s]=E_0[1/\{(1+r_{s+1})\cdots(1+r_t)\}\,|\,\mathcal{F}_s] \tag{20}$$

なる関係がマルチンゲール測度の下でしたがなわなければならない。このことは，$r_t>0$であるから，固定されたs, ωの各々に対し，$\tau\to Z^\tau_s(\omega)$が$Z^{s+1}_s(\omega)<1$をもつ減少函数となることを意味している。ここで，$\tau=s+1$と設定すると，(20)式から

$$Z^{s+1}_s=\frac{1}{1+r_{s+1}} \tag{21}$$

$$\text{or}\quad 1+r_{s+1}=\frac{1}{Z^{s+1}_s} \tag{22}$$

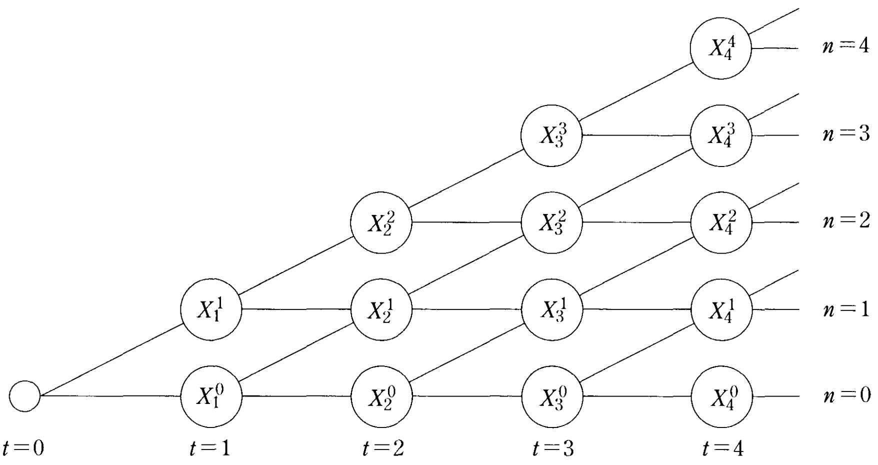

図-1

がしたがう。

いま，利子率が二項過程（binominal process）にしたがうものとしよう[3)]。

確率過程 X_t が初期値 $X_0=0$, 状態空間 $E=\{0, 1, \cdots, T\}$，さらに推移確率（transition probability）

$$P\{X_{t+1}=j \mid X_t=n\}>0, \quad j=n+1 \text{ or } j=n; t=0, \cdots, T-1 \tag{23}$$

をもつ Markov 連鎖にしたがうものとする。(23)式の関係は，t 時点に状態 n にある過程が，$t+1$ 時点には必ず n か $n+1$ のいずれかの状態に推移することを意味している。このとき，Markov 連鎖 X は，状態空間において格子構造（lattice structure）を構成する。(図-**1**参照[4)]。)

しかるに，上の Markov 連鎖は，推移確率が t 毎に異なる値をとるから定常的でない。定常性を回復するために新たな確率過程 $\hat{X}_t=(X_t, t)$ を定義しよう。$\hat{X}_t=(X_t, t)$ は確かに Markov 連鎖であり，定常性をもつ。図-**1**において，各々の節（nodes）は生起し得る状態 (n, t) に対応し，各々の枝（branches）は Markov 連鎖の正の推移確率に対応する。

さて，$t=0, 1, \cdots, T-1$ に対して函数 $\rho_t:\{0, 1, \cdots, t\} \to (0, \infty)$ を導入し，利子率直物レート r を

$$r_{t+1}(\omega)=\rho_t(X_t(\omega)), \quad t=0, 1, \ldots, T-1 \tag{24}$$

と定義しよう。Markov 連鎖 X は，それを知ることで利子率直物レートを知ることになるという特性をもつ外生的要素とみなされ得る。t 時点において，過程が状態 n にある，すなわち，$X_t=n$ であることを知れば，$r_{t+1}=\rho_t(n)$ を知るばかりでなく，時点 $t+1$ において，直物レート r_{t+1} が $\rho_{t+1}(n)$ か $\rho_{t+1}(n+1)$ の必ずどちらかになることが知れるごとくである。特に，ρ_t が単調増加函数であるとすれば，r_{t+1} を知ることは X_t を知ることにもなり，直物レート自体 Markov 連鎖そのものとなる。

上の Markov 連鎖の議論を期間構造モデルに連結させるためには，ρ_t の函数形が特定されれば十分であるが，その必要はない。すなわち，図-**1**において格子構造の節の各々における r_t の値が特定できれば，そこでの状態空間表現から利子率の過程を特定する期間構造モデルが展開可能となる。状態 $(n, t)(n=0, 1, \cdots, t; t=0, 1, \cdots, T-1)$ に連関する利子率を $r_{t+1}(n)$ とすると，たとえ $r_{t+1}(n_1)=r_{t+1}(n_2)$ であっても，t 時点に市場取引者は原状態が $\hat{X}_t=(n, t)$ であることを知ることができるごとくである。

期間構造モデルを閉じるために要する残る特定事項は，過程 $\hat{X}$ の条件付マルチンゲール推移確

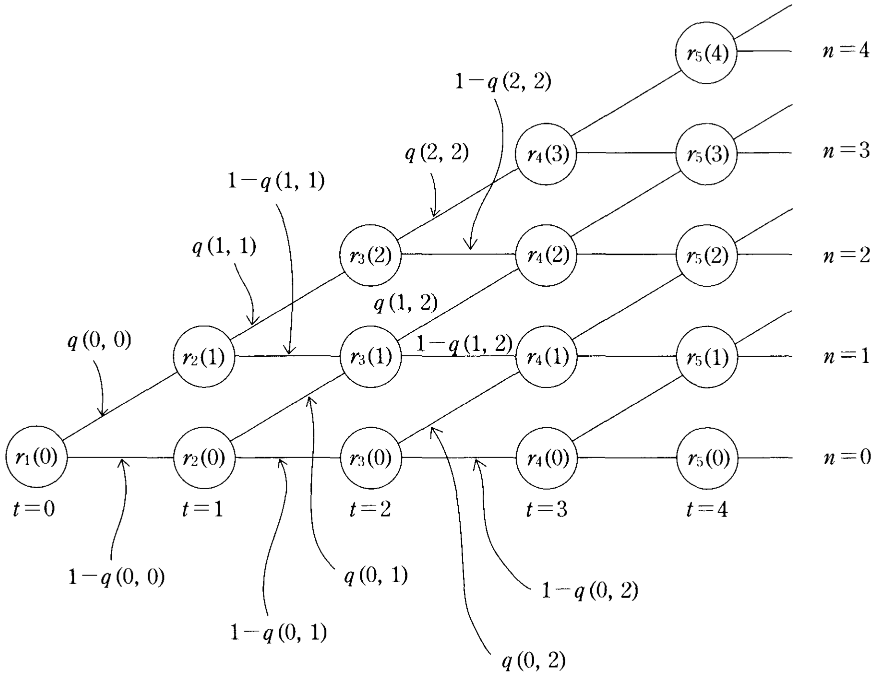

図-**2**

率のそれである。しかるに，状態 $\hat{X}_t(n, t)$からの推移の可能性は，状態 $(n+1, t)$ か状態 (n, t) のどちらかであるから，$n=0, 1, \cdots, t; t=0, 1, \cdots, T-1$に対して

$$q(n, t)=Q\{\hat{X}_{t+1}(n+1, t+1) \mid \hat{X}_t(n, t)\} \tag{25}$$

$$1-q(n, t)=Q\{\hat{X}_{t+1}(n, t+1) \mid \hat{X}_t(n, t)\} \tag{26}$$

と設定し得る。このとき，(25),(26)式は，また，それぞれ

$$q(n, t)=Q\{r_{t+2}(n+1) \mid \hat{X}_t(n, t)\} \tag{27}$$

$$1-q(n, t)=Q\{r_{t+2}(n) \mid \hat{X}_t(n, t)\} \tag{28}$$

をも意味する。以上の Markov 連鎖期間構造モデルは，格子構造図を構成する。(図-**2**参照[5]。) このとき，T 期間が存在するものとすれば，節の数は T 期に至るまで$1+2+\cdots+T=T(T+1)/2$を数える。したがって，$T(T+1)$ 個のパラメータが特定され，節の各々に 1 つずつの r と q の値が対応する。

さて，以上の想定の下で，ゼロ・クーポン債価格を導こう[6]。

ゼロ・クーポン債価格の Markov 性を想起すれば，(20)式から，τを満期とするゼロ・クーポン債価格は

$$\begin{aligned} Z_t^\tau &= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_\tau)\} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= E_Q[1/\{(1+r_{t+1})\cdots(1+r_\tau)\} \mid X_t] \end{aligned} \tag{29}$$

で与えられる。(29)式は，ゼロ・クーポン債価格が原状態 X_t には依存するが，価格，利子率の時間推移から独立であることを示唆している。このとき，Z_t^τの値は，X_t の函数として表現し得るから，過程 Z_t^τは図-**2**の格子構造の各々の節における値を知ることによって特定される。

いま，Z_t^τの状態 $X_n=n$ に対応する節における Z_t^τの値を $Z_t^\tau(n)$で表わせば，$Z_t^\tau(n)$は，利子率直物

レート $r_{t+1}(n)$ と条件付マルチンゲール測度 $q(n,\ t)$(および $1-q(n,\ t)$)のタームで表現される。すなわち，価格フォーミュラ

$$Z_t^\tau(n)=\frac{1}{1+r_{t+1}(n)}[q(n,\ t)Z_{t+1}^\tau(n+1)+(1-q(n,\ t))Z_{t+1}^\tau(n)] \tag{30}$$

がしたがう。(30)式右辺の[　]内は，第１項の状態 n からもう１つの状態 $n+1$ に推移する場合，第２項の状態 n に留まる場合に対応するそれぞれの価格の成立可能性を可重とする期待価格を与えている。

さらに，

$$\delta(n,\ t,\ 1)=q(n,\ t)/(1+r_{t+1}(n)) \tag{31}$$

$$\delta(n,\ t,\ 0)=(1-q(n,\ t))/(1+r_{t+1}(n)) \tag{32}$$

と設定すれば，(30)式は

$$Z_t^\tau(n)=\sum_{i=0}^{1}\delta(n,\ t,\ i)Z_{t+1}^\tau(n+i) \tag{31}$$

と表現し直される。しかるに，$Z_\tau^\tau=1$ であるから，τ 時点において，後向き帰納法（backward induction）の手続きを適用すれば，$Z_t^\tau(n)$ は，さらに

$$Z_t^\tau(n)=\sum_{i_1=0}^{1}\delta(n,\ t,\ i_1)\sum_{i_2=0}^{1}\delta(n+i,\ t+1,\ i_2)\cdots$$
$$\cdots\sum_{i_{\tau-t}=0}^{1}\delta(n+i_1+\cdots+i_{\tau-t-1},\ \tau-1,\ i_{\tau-1}) \tag{32}$$

と表現し直される。したがって，$t=0$ 時点におけるゼロ・クーポン債価格は，$t=0,\ n=0$ と設定すれば(32)式から

$$Z_0^\tau=\sum_{i_1=0}^{1}\delta(0,\ 0,\ i_1)\sum_{i_2=0}^{1}\delta(i,\ 1,\ i_2)\cdots$$
$$\cdots\sum_{i_\tau=0}^{1}\delta(i_1+\cdots+i_{\tau-1},\ \tau-1,\ i_\tau) \tag{33}$$

と表現される。

ところで，任意の増大情報系に対し，主観的確率測度の下で利子率過程，価格過程が現実のそれに接近するように，さらに，それらのゼロ時点値がゼロ時点期間構造と整合するように，利子率直物レート過程その他モデルの要素を特定することは難しい。しかるに，上の Markov 期間構造モデルは $T(T+1)$ 個のパラメータをもつそれであり，対してゼロ時点ゼロ・クーポン債価格式((33)式)は，T 本の方程式を与えるに過ぎない。したがって，パラメータ選択上，依然としてかなりの自由度が残されている。

上の自由度を縮少させるべく，条件付マルチンゲール確率が状態 n から独立であるものとし，

$$q(n,\ t)=q(t),\quad 0\le n\le t<T \tag{34}$$

がしたがうものとする。このとき，T 個の $q(0),\ q(1),\ \cdots,\ q(T-1)$ を得る。ここで，利子率直物レートの変動性を表わすボラティリティ（volatility）の尺度 $c(t)$

$$\frac{Z_t^{t+1}(n+1)}{Z_t^{t+1}(n)}=\frac{1+r_{t+1}(n)}{1+r_{t+1}(n+1)}=c(t),\quad 0\le n\le t<T \tag{35}$$

を定義する[7]。このとき，T 個の $c(0),\ \cdots,\ c(T-1)$ を得る。(35)式は，直ちに，遷移式

$$Z_{\tau-1}^\tau(n+i)=Z_{\tau-1}^\tau(n)c^i(\tau-1),\quad 0\le n\le n+i\le\tau-1<T \tag{36}$$

を得る。このとき，$n=0$において，

$$Z_{\tau-1}^{\tau}(i)=Z_{\tau-1}^{\tau}(0)c^{i}(\tau-1), \quad 0\leq i\leq \tau-1<T \tag{37}$$

を得る。いま，$Z_{\tau-1}^{\tau}(n)=1/(1+r_{\tau}(n))$を想起すれば，$r_t(0)$が既知のとき逐次的に$r_t(n)\,(n\geq 1)$を帰納し得る。したがって，$T$個の$r_0(0), r_1(0), \cdots, r_{T-1}(0)$（あるいは，$Z_0(0), Z_1(0), \cdots, Z_{T-1}(0)$）が，$T$個のゼロ・クーポン債価格の観測値$Z_0^1, Z_0^2, \cdots, Z_0^T$と整合的に選択されるとき，上の期間構造モデルは，過不足なく特定される。

例えば，すべてのn, tについて，$q(n,t)=q(t)=0.5$がしたがうものとする[8]。図-**2**において，各々の節からの分枝がすべて0.5の確率で展開する場合である。直ちに

$$\delta(n,t,1)=\delta(n,t,0)=\frac{0.5}{(1+r_{t+1}(n))}=0.5\,Z_t^{t+1}(n) \tag{38}$$

がしたがう。さらに，(33)式は，

$$Z_0^{\tau}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\tau-1}Z_0(0)\sum_{i_1=0}^{1}Z_1^2(i_1)\sum_{i_2=0}^{1}Z_2^3(i_1+i_2)\cdots\sum_{i_{\tau-1}=0}^{1}Z_{\tau-1}^{\tau}(i_1+\cdots+i_{\tau-1}) \tag{39}$$

を与える。ここで，$T(T+1)/2$個の利子率直物レートがT個のゼロ時点ゼロ・クーポン債価格と$T(T-1)/2$個の以下の直物レート・ボラティリティー

$$\sigma_t(n)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{r_{t+2}(n+1)}{r_{t+2}(n)}\right), \quad 0\leq n\leq t<T-1 \tag{40}$$

と整合的に選択されれば，$(T(T-1)/2)+T=T(T+1)/2$個の制約式が得られ，モデルは，過不足なく特定される。このとき，r_{t+1}ないし$Z_t^{t+1}(n)$を知れば，

$$r_{t+2}(n+1)=r_{t+2}(0)\exp\{2[\sigma_t(0)+\cdots+\sigma_t(n)]\} \tag{45}$$

を知ることができるごとくである。

1）本項における議論について，例えばPye［28］，Heath=Jarrow=Morton［14］，Pliska［27］，Mel'nikov［24］，Černý［3］，Epps［12］等参照。

2）連続変数の場合における債券価格，利回り，利子率直物レート，利子率の期間構造の関連性として，例えば，Vasicek, *op. cit.*, Richard, *op. cit.*,参照。

3）二項過程について，Ho=Lee［18］，Pliska, *op. cit.*, Chap.3, 参照。

4）Pliska, *op. cit.*, Chap.6, Figure6. 1に対応する。

5）Pliska, *op. cit.*, Chap. 6, Figure6. 2に対応する。

6）以下の議論は，Pliska, *op. cit.*, Chap. 6の手続きに負う。

7）Pliska, *op. cit.*, Chap. 6, Example6. 4, 参照。

8）Pliska, *op. cit.*, Chap. 6, Example6. 5, 参照。

第2節　連続的確率過程

1. 期間構造方程式

本節では，利子率直物レートが連続的確率過程にしたがうところでの債券価格フォーミュラを導く。

本項では，利子率直物レートが連続的確率過程にしたがうところでの期間構造方程式を導く[9]。

まず，安全債券（default free bonds）を想定し，その市場価格が利子率直物レート r と時間 t の函数となるものと仮定し，利子率は拡散過程（diffusion process）にしたがって，連続的に変化するものとする。すなわち，利子率は，確率微分方程式

$$dr(t)=\sigma r(t)dz(t) \tag{46}$$

にしたがう。σ^2は分散で，$z(t)$は，Wiener 過程（Wiener process）である。また，直物レート $r(t)$ は，対数正規分布（lognormal distribution）にしたがい，確実に $r(t)>0$ であるものとする。

しかるに，利子率が確定値であり続ける場合の債券ないし条件付請求権の期間構造方程式とは異なり，利子率が確率的変動を繰返すところでの期間構造方程式は，投資家の嗜好（tastes）と確率信頼度（beliefs）に依存することになる。

利子率それ自体は，取引対象資産とはなり得ないから債券のヘッジ（hedge）に適用し得ない。ここで，異なる満期期日をもつ2種類の安全債券から成るヘッジ・ポートフォリオを想定する。債券価格を $p_1(r,t)$，$p_2(r,t)$，ポートフォリオ・シェアを w_1, w_2 とすれば[10]，瞬時ポートフォリオ収益率は $w_1(dp_1(r,t)/p_1(r,t))+w_2(dp_2(r,t)/p_2(r,t))$ で与えられる。ここで，債券価格 $p_i(r, t)$ に伊藤補題（Ito's lemma）を適用し，(46)式を考慮すれば

$$\frac{dp_i}{p_i}=\mu_i dt+\sigma_i dz \tag{47}$$

がしたがう。ただし，以下で，函数要素 r, t を省略する。ただし，

$$\mu_i=\frac{1}{p_i}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 r^2\frac{\partial^2 p_i}{\partial r^2}+\frac{\partial p_i}{\partial t}\right) \tag{48}$$

$$\sigma_i=\frac{\sigma r}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial r} \tag{49}$$

である。

さて，ポートフォリオ・シェア w_1 を，一方の債券を売却し他方の債券を購入する取引を通じて

$$w_1\sigma_1+w_2\sigma_2=0 \tag{50}$$

が満たされるように選択するものとする[11]。このとき，ポートフォリオ収益率は確定値をとる。さらに，裁定機会が排除されるところで，上の収益率は利子率に均等化しなければならない。このとき，ゼロ裁定条件（no arbitrage condition）

$$\frac{w_1}{p_1}\left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 r^2\frac{\partial^2 p_1}{\partial r^2}+\frac{\partial p_1}{\partial t}-r\right)+\frac{w_2}{p_2}\left(\frac{1}{2}\sigma_2^2 r^2\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2}+\frac{\partial p_2}{\partial t}-r\right)=0 \tag{51}$$

がしたがう。(51)式は，(50)式を考慮すれば

$$\frac{\mu_1-r}{\sigma_1}=\frac{\mu_2-r}{\sigma_2}=\lambda(r, t) \tag{52}$$

を導く。

(52)式の分子μ_i-r は危険プレミアム（risk premium）に相当する。しかるに，(52)式は満期期日から独立となるから満期期日の如何に関わらず共通となり，その標準偏差に対する比$\lambda(r,t)$は，危険の市場価格（market price of risk）と呼ばれる。いま，上の(48)，(49)式を想起すれば

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2 r^2\frac{\partial^2 p_i}{\partial r^2}-\sigma_i r\lambda(r, t)\frac{\partial p_i}{\partial r}-rp_i+\frac{\partial p_i}{\partial t}=0 \tag{53}$$

がしたがう。(53)式は，債券の期間構造方程式（term structure equation）ないし評価方程式（value equation）と呼ばれる。

ところで，利子率が Ornstein=Uhlenbeck 過程（Ornstein=Uhlenbeck process）にしたがって変動するものとすると，利子率は，確率微分方程式

$$dr = -\beta\{r-\mu\}dt + \sigma dz, \quad \beta > 0 \tag{54}$$

にしたがうことになる。

上と同様の手続きを適用すれば，債券の期間構造方程式

$$\frac{1}{2}\sigma_i^2\frac{\partial^2 p_i}{\partial r^2} + [\beta(\mu-r) - \lambda(r,t)\sigma_i]\frac{\partial p_i}{\partial r} - rp_i + \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0 \tag{55}$$

がしたがう。Ornstein=Uhlenbeck 過程は平均μに戻ろうとする平均回帰過程（mean reverting process）となり，そこでのβは調整速度に相当し，βが大きい程平均への回帰は，より速やかになる[12)]。

すでに示唆したごとく，利子率はそれ自体，取引対象資産たり得ない。そこで，株式，オプションのヘッジの場合には可能であった債券価格$p_i(r,t)$と投資家の選好の依存関係を断ち切ることが不可能となる。したがって，$\lambda(r,t)$の函数形に何らかの追加仮定を設ける手続きが必要になってくる。以下で，投資家の消費に関する効用函数の形状に追加仮定を設け$\lambda(r,t)$が一定となるような手続きを採用することにする。

さて，すべての資産が有限責任タイプのそれであり，取引費用ゼロで，連続的に取引が可能となる完全市場，すなわち，効率的市場（efficient market）が存在するものとする。このとき，証券価格が

$$\frac{dq_i}{q_i} = \mu_i\, dt + b_i\, dz_i \tag{56}$$

にしたがって変動するものとする。ただし，相関係数ρ_{ij}を用いれば$dz_i dz_j = \rho_{ij} dt$がしたがう。しかるに，種々の証券が混在するところで，1種類は安全資産が含まれていなければならない。いま，$n+1$番目の債券が瞬時的に安全（instantaneously risk-free）で$\sigma_{n+1}=0$となるものとすれば，瞬時的収益率μ_{n+1}は安全利子率rに等しくならなければならない。さらに，他のn番目の証券価格は瞬時的に利子率rと完全相関の関係に立ち，$q_n(r,t) = p_n(r,t)$がしたがう。したがって，利子率rは，上の(46)式の過程にしたがい，$z_n(t)$は，(46)式の Wiener 過程$z(t)$と一致することになる。

投資家のi番目の資産の瞬時的購入シェア量$N_i(t)$，瞬時的消費$C(t)$に対し，

$$-C(t)dt = \sum_{i=1}^{n+1} dN_i(t)dq_i(t) + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i(t)q_i(t) \tag{57}$$

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n+1} N_i(t)q_i(t) \tag{58}$$

がしたがう。ここで，伊藤補題を適用すれば，(58)式から

$$dW = \sum_{i=1}^{n+1} N_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i q + \sum_{i=1}^{n+1} dN_i\, dq_i \tag{59}$$

がしたがう。ここで，(59)式右辺の第2項，第3項の和は，キャピタル・ゲイン以外の源泉からの予算の純増額を表わしている。(57), (59)式から予算方程式

$$dW=\sum_{i=1}^{n+1}N_i(t)dq_i-C(t)dt \tag{60}$$

を得る。ここで，$w_i(t)=N_i(t)q_i(t)/w(t)$で，i番目の資産への投資シェアを表わす。

上の(56)式を代入すれば，(60)式は

$$dW=\sum_{i=1}^{n+1}w_iW\mu_i dt-Cdt+\sum_{i=1}^{n+1}w_iW\sigma_i dz_i \tag{61}$$

と変形される。ただし，$\sum_{i=1}^{n+1}w_i=1$，したがって，$w_{n+1}=1-\sum_{i=1}^{n}w_i$がしたがう。(61)式を考慮すれば，予算方程式は

$$dW=\sum_{i=1}^{n}w_i(\mu_i-r)Wdt+(rW-C)dt+\sum_{i=1}^{n}w_iW\sigma_i dz_i \tag{62}$$

と表現し直される。

さて，投資家の消費とポートフォリオの決定の最適ルールを導くために最適状態評価函数（optimal value function）

$$J(W,r,t)=\max_{\{C,(w)\}}E_t\left[\int_t^T U(C,s)ds+B(W(T),T)\right] \tag{63}$$

を定義する。ただし，E_tは，$W(t)=W$, $r(t)=r$に条件付きの期待値オペレータである。さらに，遺贈函数（bequest function）に相当する$B(W(T),T)$は無視し得るものとする。いま，動的計画法（dynamic programming）を適用し，微分生成作用素（differential generator）$\mathscr{L}_y$を用いれば，Euler方程式（Euler equation）

$$0=\max_{\{C,(w)\}}\{U(C,t)+\mathscr{L}_y[J(W,r,t)]\} \tag{64}$$

がしたがう。ここで，(56),(62)式を考慮し，伊藤補題を適用すれば

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_y[J(W,r,t)]=\frac{\partial J}{\partial t}+\{W\sum_{i=1}^{n}[w_i(\mu_i-r)+r]-C\}\frac{\partial J}{\partial W}+\frac{1}{2}W^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}\\+W\sum_{i=1}^{n}w_i\sigma_{ir}\frac{\partial^2 J}{\partial W\partial r}+\frac{1}{2}\sigma\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}\}\end{aligned} \tag{65}$$

がしたがう。ここで，上の(64)式の最大化を実行するためにLagrange函数

$$\Phi=U(C,t)+\mathscr{L}_y[J]+\lambda(1-\sum_{i=1}^{n}w_i) \tag{66}$$

を定義し，消費Cとポートフォリオw_iについて最大化を図れば，1階条件

$$\frac{\partial U}{\partial C}-\frac{\partial J}{\partial W}=0 \tag{67}$$

$$(\mu_i-r)\frac{\partial J}{\partial W}+W\sum_{j=1}^{n}w_j\sigma_{ij}\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}+\sigma_{ir}\frac{\partial^2 J}{\partial W\partial r}=0 \tag{68}$$

がしたがう。しかるに，(68)式は偏微分方程式を成しており，一般に解くことが難しい。

ここで，上の偏微分方程式((68)式)を常微分方程式に帰着させるべく効用函数の特定化を図ることにする。特定化の最初の候補は，絶対的危険回避度一定効用函数（constant absolute risk aversion (CARA) utility function）である。

いま，投資家の出発点における所得水準をW_0とするとき，CARA函数は，その出発点の位置の

如何に関わらず，W_0に相対的に同一の効用を与え続ける効用函数である。すなわち，すべての W，W_0と未定函数 f に対し

$$\frac{U(W)}{U(W_0)}=f(W-W_0) \tag{69}$$

なる不変性（invariance property）を満たす函数である。(69)式の関係を満たす唯一の効用函数は指数函数（exponential function）

$$U(W)=-e^{-aW},\quad a>0 \tag{70}$$

の形で与えられる。いま，(90)式を(69)式に適用すれば，直ちに

$$\frac{U(W)}{U(W_0)}=-e^{-a(W-W_0)}=U(W-W_0) \tag{71}$$

なる関係がしたがう。このとき，a は絶対的危険回避度（coefficient of absolute risk aversion）と呼ばれ，(71)式は，所得の絶対水準の変化に応ずる効用変化が出発点 W_0の選び方がどうあれ一定となることを含意している。

特定化の次の候補は，所得の相対的変化 W/W_0に対して一定の反応を示す相対的危険回避度一定効用函数（constant relative risk aversion（CRRA）utility function）である，すなわち

$$\frac{U(W)}{U(W_0)}=f\left(\frac{W}{W_0}\right) \tag{72}$$

なる不変性を示す効用函数である。(72)式を満たす効用函数は

$$U(W)=\frac{W^{1-\nu}}{1-\nu},\quad \nu>0, \nu\neq 1 \tag{73}$$

の形で与えられる。(73)式を(72)式に適用すれば

$$\frac{U(W)}{U(W_0)}=\left(\frac{W}{W_0}\right)^{1-\nu}=f\left(\frac{W}{W_0}\right) \tag{74}$$

なる関係がしたがう。このとき，ν は相対的危険回避度（coefficient of relative risk aversion）と呼ばれる。(73)式の表現は$\nu=1$に対して定義し得ないが，νを 1 に近づけることによって極限において対数函数を導く。

いま，$y=W^{1-\nu}$と設定すれば，逆函数$\nu=\log_W y$ がしたがう。このとき，

$$\frac{d\nu}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\log y}{\log W}\right)=\left(\frac{1}{\log W}\right)\left(\frac{1}{y}\right) \tag{75}$$

がしたがうから

$$\frac{dy}{d\nu}=W^{1-\nu}\log W \tag{76}$$

を得る。ここで，0÷0タイプの極限計算に対する L'Hopital ルールを適用すれば

$$\lim_{\nu\to 1}\left[\frac{W^{1-\nu}}{1-\nu}\right]=\frac{-\lim_{\nu\to 1}W^{1-\nu}\log W}{-1}=\log W \tag{77}$$

がしたがう。したがって，(73)式は

$$U(W)=\begin{cases}\dfrac{W^{1-\nu}}{1-\nu} & \text{for } \nu>0,\ \nu\neq 1\\ \log W & \text{for } \nu=1\end{cases} \tag{78}$$

と表現し直される。すなわち，対数効用函数は，相対的危険回避度が1に等しい相対的危険回避度一定効用函数となる。

ところで，上の2つのタイプの効用函数は，双曲的絶対的危険回避効用函数（hyperbolic absolute risk aversion（HARA）utility function）

$$U(W)=e^{-\rho t}V(W),\quad \text{where } V(W)=\frac{1-\nu}{\nu}\left(\frac{\beta W}{1-\nu}+\eta\right)^{\nu} \tag{79}$$

の族に属することが知られている[13]。このとき，絶対的危険回避度は

$$a(W)=-\frac{V''}{V'}=1/\left(\frac{W}{1-\nu}+\eta/\beta\right)>0 \tag{80}$$

で表わされ，所得 W に関して双曲線を描く性質に呼称の由来がある。ただし，$a(W)$は，$\nu\neq 1$, $\beta>0$，さらに$(\beta W/1-\nu)+\eta>0$，加えて$\nu=-\infty$のとき$\eta=1$なる制約を負う。

さて，以下で，上の偏微分方程式を成す1階条件（(68)式）の交叉項を消去すべく対数効用函数を援用することにする。

しかるに，効用函数を

$$U(W,t)=\phi(t)\log W \tag{81}$$

と設定するとき，最適状態評価函数は

$$J(W,r,t)=g(t)\log W+H(r,t) \tag{82}$$

の形をとる[14]。ただし，$H(r,t)$は，遺贈函数に相当し無視し得るものとする。

しかるに，(82)式の下で$\partial J/\partial W=g(t)/W$，$\dfrac{\partial^2 J}{\partial W^2}=-g(t)/W^2$がしたがうことを考慮し，さらに n 番目の債券の純供給量はゼロとなることを想起すれば，(68)式は

$$\mu_i-r=\sum_{j=1}^{n-1}w_j\sigma_{ij} \tag{83}$$

と表現し直される。しかるに，n 番目の債券価格と瞬時的利子率の完全相関性 $q_n(r,t)=p_n(r,t)$と利子率の確率微分方程式（(46)式）を想起すれば，(49)式は

$$b_n=\frac{\sigma r}{W}\frac{\partial W}{\partial r} \tag{84}$$

を意味するから

$$\lambda(r,t)=\frac{\mu_n-\nu}{b_n}=\sum_{j=1}^{n-1}w_jb_j\rho_{nj}=\text{const.} \tag{85}$$

がしたがう。ここで，$\xi=\lambda/\sigma$と設定し，さらに債券の満期期日をτとすれば，債券の期間構造方程式（(53)式）は，

$$\frac{1}{2}\sigma^2r^2\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}-\sigma^2\xi r\frac{\partial q}{\partial r}-rq-\frac{\partial q}{\partial \tau}=0 \tag{86}$$

と書き改められる。境界条件

$$q(r,0)=1 \tag{87}$$

$$q(0, \tau) = 1 \tag{88}$$

$$q(\infty, \tau) = 0 \quad \text{for } \tau > 0 \tag{89}$$

の下での上の(86)式の解は，求めらるべき債券価格フォーミュラを与える[15]。

ところで，利子率が Ornstein＝Uhlenbeck 過程にしたがって変動する場合についても，上と同様の手続きを適用すれば，債券の期間構造方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + [\beta(\mu - r) - \sigma^2\xi]\frac{\partial q}{\partial r} - rq - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \tag{90}$$

がしたがう。同様の境界条件が満たされる下で，(90)式の解は，利子率変動が Ornstein＝Uhlenbeck 過程にしたがうときの求めらるべき債券価格フォーミュラを与える筈である。

2. 債券価格フォーミュラ

本項では，上の債券の期間構造方程式に Fourier 変換の手続きを適用することによって解としての債券価格フォーミュラを導く[16]。

さて，利子率が拡散過程

$$\frac{dr(t)}{r(t)} = \sigma dz(t) \tag{91}$$

にしたがって変動するところで，投資家が相対的危険回避度一定効用函数をもつとき導かれた満期 τ の債券の期間構造方程を

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 r^2\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} - \sigma^2\xi r\frac{\partial q}{\partial r} - rq \tag{92}$$

と表現し直しておこう。ただし，$\xi = \sigma/\lambda$ である。

いま，(92)式から q と $\partial q/\partial r$ を消去するために

$$q(r, \tau) = Q(r, \tau)e^{\alpha r + \beta\tau} \tag{93}$$

を満たすような函数 $Q(r, \tau)$ を新たに定義する。(93)式から，直ちに

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\partial Q}{\partial \tau}e^{\alpha r + \beta\tau} + \beta Qe^{\alpha r + \beta\tau} = \left(\beta Q + \frac{\partial Q}{\partial \tau}\right)e^{\alpha r + \beta\tau} \tag{94}$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial r}e^{\alpha r + \beta\tau} + \alpha Qe^{\alpha r + \beta\tau} = \left(\alpha Q + \frac{\partial Q}{\partial r}\right)e^{\alpha r + \beta\tau} \tag{95}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} &= \left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}\right)e^{\alpha r + \beta\tau} + \alpha\left(\alpha Q + \frac{\partial Q}{\partial r}\right)e^{\alpha r + \beta\tau} \\ &= \left(\alpha^2 Q + 2\alpha\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}\right)e^{\alpha r + \beta\tau}\end{aligned} \tag{96}$$

がしたがう。ここで，(94), (95)そして(96)式を(92)式に代入し，両辺を $e^{\alpha r + \beta\tau}$ で除すと

$$\beta Q + \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 r^2\left(\alpha^2 Q + 2\alpha\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2}\right) - \sigma^2\xi r\left(\alpha Q + \frac{\partial Q}{\partial r}\right) - rQ \tag{97}$$

$$\text{or} \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 r^2\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \sigma^2 r(r\alpha - \xi)\frac{\partial Q}{\partial r} + \{\frac{1}{2}\sigma^2 r^2\alpha^2 - \sigma^2\xi + \alpha - (r + \beta)\}Q \tag{98}$$

がしたがう。上の(98)式において

$$r\alpha-\xi=0 \tag{99}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2r^2\alpha^2-\sigma^2\xi r\alpha-(r+\beta)=0 \tag{100}$$

となるようにα, βを定めれば，(98)式から Q，$\partial Q/\partial r$ の項を消去し得る。(99), (100)式から

$$\alpha=\frac{\xi}{r} \tag{101}$$

$$\beta=\frac{1}{2}\sigma^2\xi(1-\xi)-r \tag{102}$$

がしたがう。いま，(101), (102) 式を満たすようにα, βを設定すれば，(98)式は

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau}=\frac{1}{2}(\sigma r)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} \tag{103}$$

と変形される。(103)式は，J. B-J. Fourier によって導かれた熱方程式（heat equation）ないし熱伝導方程式（equation of heat conduction）に相当する[17]。ここで，(103) 式を

$$Q_\tau-c^2Q_{rr}=0, \quad \text{where } c^2=\frac{1}{2}(\sigma r)^2 \tag{104}$$

と表記し直しておこう。

さて，$(-\infty, \infty)$で定義される連続函数$f(x)$が

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty \tag{105}$$

を満たすとき，$f(x)$は絶対可積分（absolutely integrable）と呼ばれ，Fourier 変換（Fourier transform）

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx \tag{106}$$

が可能となる[18]。ただし，i は，$i^2=-1$を満たす虚数単位である。また，$f(x)$は，$F(\lambda)$から Fourier 逆変換（Fourier inverse transform）を施すことによって導かれる。さらに，高次導函数の Fourier 変換に関して，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^{(k)}(x)e^{-i\lambda t}dx=(i\lambda)^{(k)}F(\lambda) \tag{107}$$

なる関係がしたがう。したがって，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-i\lambda x}dx=i\lambda F(\lambda) \tag{108}$$

がしたがう。

ここで，上の(104) 式における Q_{rr} に Fourier 変換を施せば

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Q_{rr}(r,\tau)e^{-i\lambda r}dr&=(i\lambda)^2F(\lambda,\tau)\\&=-\lambda^2F(\lambda,\tau)\end{aligned} \tag{109}$$

を得る。

ここで，(104)式を $F(\lambda,\tau)$の常微分方程式に変換するために，その両辺に$(1/\sqrt{2\pi})e^{-i\lambda r}$を乗じて r について$-\infty$から∞まで積分すれば

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Q_\tau(r,\tau)e^{-i\lambda r}dr+(c\lambda)^2F(\lambda,\tau)=0 \tag{110}$$

がしたがい，さらに，(106)式を想起すれば

$$\frac{\partial F(\lambda,\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Q_\tau(r,\tau)e^{-i\lambda r}dr \tag{111}$$

がしたがうから，(104)式は，常微分方程式

$$\frac{\partial F(\lambda,\tau)}{\partial\tau}+(c\lambda)^2F(\lambda,\tau)=0 \tag{112}$$

で表わされる。いま，$Q(r,\tau)$の初期条件を$Q(r,0)=Q(r)$とすれば，Fの初期条件$F(\lambda,0)=F(\lambda)$が

$$F(\lambda,0)=F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Q(x)e^{-i\lambda r}dr \tag{113}$$

が与えられる。

初期条件$F(\lambda,0)=F(\lambda)$の下で，(112)式の解は

$$F(\lambda,\tau)=F(\lambda)e^{-(c\lambda)^2\tau} \tag{114}$$

で与えられるから，逆 Fourier 変換を施せば

$$\begin{aligned}Q(r,\tau)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda,\tau)e^{i\lambda r}d\lambda\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda r-\lambda^2c^2\tau}d\lambda\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Q(s)e^{-i\lambda s}ds\right\}e^{i\lambda r-\lambda^2c^2\tau}d\lambda\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(r-s)-\lambda^2c^2\tau}Q(s)d\lambda\,ds\end{aligned} \tag{115}$$

がしたがう。

さて，Euler 公式（Euler formula）を適用すれば

$$e^{i\lambda(r-s)}=\cos(\lambda(r-s))+i\sin(\lambda(r-s)) \tag{116}$$

がしたがう。さらに，偶函数$\cos\theta$に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda(r-s))d\lambda=2\int_0^{\infty}\cos(\lambda(r-s))d\lambda \tag{117}$$

となり，奇函数$\sin\theta$に対して

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\lambda(r-s))d\lambda=0 \tag{118}$$

となることに留意すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(r-s)}d\lambda=2\int_0^{\infty}\cos(\lambda(r-s))d\lambda \tag{119}$$

がしたがうから

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(r-s)-\lambda^2c^2\tau}d\lambda=2\int_0^{\infty}e^{-\lambda^2c^2\tau}\cos(\lambda(r-s))d\lambda \tag{120}$$

を得る。

いま，$r-s=\varepsilon$ と置き換えると，(120)式の積分値は

$$I(\varepsilon)=2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2c^2\tau}\cos(\lambda\varepsilon)d\lambda \tag{121}$$

で表わされる。ここで，$I(\varepsilon)$をεに関して微分し，$d\cos(\alpha\theta)/d\theta=-\alpha\sin(\alpha\theta)$なる関係を考慮すれば

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}=-2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2c^2\tau}\sin(\lambda\varepsilon)d\lambda \tag{122}$$

がしたがう。ここで，(122)式に部分積分を施すために，$s=\sin(\varepsilon\lambda)$，$dz=-2\lambda e^{-\lambda^2c^2\tau}d\lambda$と置くと，

$$ds=\varepsilon\cos(\lambda\varepsilon)d\lambda \tag{123}$$

$$z=\frac{e^{-\lambda^2c^2\tau}}{c^2\tau} \tag{124}$$

がしたがうから，

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\sin(\lambda\varepsilon)\frac{e^{-\lambda^2c^2\tau}}{c^2\tau}\Big|_0^{\infty}-\frac{\varepsilon}{c^2\tau}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2c^2\tau}\cos(\lambda\varepsilon)d\lambda \tag{125}$$

を得る。しかるに，(125)式右辺第1項はゼロとなるから

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}=-\frac{\varepsilon}{2c^2\tau}I(\varepsilon) \tag{126}$$

と簡単化される。(126)式は，変数分離形微分方程式であるから，解

$$I(\varepsilon)=I(0)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4c^2\tau}\right) \tag{127}$$

を与える。いま，(127)式を全微分すれば

$$\begin{aligned} dI(\varepsilon)&=I(0)(-\frac{\varepsilon}{2c^2\tau})\exp\frac{\varepsilon^2}{4c^2\tau}d\varepsilon \\ &=(-\frac{\varepsilon}{2c^2\tau})I(\varepsilon)d\varepsilon \end{aligned} \tag{128}$$

となり，(126)式に帰着し，(127)式が確かに解となっていることが確かめられる。ここで，(121)式を想起すれば

$$I(0)=2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2c^2\tau}\cos(0)d\lambda=2\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2c^2\tau}d\lambda \tag{129}$$

を得る。しかるに，函数

$$x(n)=e^{-nx^2} \tag{130}$$

の Fourier 変換は

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}(e^{-nx^2})e^{-i\lambda x}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \tag{131}$$

がしたがうから，(129)式は

$$I(0)=\sqrt{\frac{\pi}{c^2\tau}} \tag{132}$$

と簡単化される。$\varepsilon=r-\xi$を想起すれば

$$I(\varepsilon)=2\int_0^\infty e^{-\lambda^2c^2\tau}\cos(\lambda(r-s))d\lambda$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{c^2\tau}}\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{4c^2\tau}\right) \tag{133}$$

を得る。(133)式を(115)式に適用すれば

$$Q(r,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{c^2\tau}}\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{4c^2\tau}\right)Q(s)ds \tag{134}$$

を得る。満期期日τをもつゼロ・クーポン債価格から定義された函数$Q(r,\tau)$が熱方程式

$$Q_\tau=c^2Q_{rr},\quad \text{where } Q(r,0)=Q(r) \tag{135}$$

で関係づけられ，その解が(134)式で与えられることが帰結される。

さて，(93)式を想起すれば，$\tau=0$において

$$q(r,0)=Q(r,0)e^{\alpha r} \tag{136}$$

がしたがう。さらに，前項で示された境界条件（(87)式）を想起すれば

$$Q(r,0)=q(r,0)e^{-\alpha r} \tag{137}$$

がしたがう。

上の(134)式において，$c^2=\frac{1}{2}\sigma^2r^2$（(104)式）を想起すれば，(137)式を代入すると

$$Q(r,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha r}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2r^2\tau}}\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{2\sigma^2r^2\tau}\right)ds \tag{138}$$

がしたがう。いま

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2r^2\tau}} \tag{139}$$

$$B=\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{2\sigma^2r^2\tau}\right) \tag{140}$$

と設定すれば，

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2r^2}}\tau^{-2}(<0) \tag{141}$$

$$\frac{\partial B}{\partial\tau}=-\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{2\sigma^2r^2}\right)\tau^{-2}(<0) \tag{142}$$

を得る。直ちに，$\partial Q(r,\tau)/\partial\tau<0$がしたがう[19]。このとき，函数$Q(r,\tau)$が，債権満期期日$\tau$に対して$Q(r,0)=e^{-\alpha r}$を切片とする右下りの曲線を描き，したがって，満期期日τをもつゼロ・クーポン債価格が，τに対して$q(r,0)=1$を切片とする右下りの曲線を描くことが帰結される。（図-**3**参照。）

さらに，前項の境界条件（(88)式）を想起し，同様の手続きを適用すれば，満期期日τをもつゼロ・クーポン債価格が，利子率直物レートrに対して，$q(0,\tau)=1$を切片とする右下りの曲線を描くことが確かめられる。（図-**4**参照。）

ところで，利子率がOrnstein＝Uhlenbeck過程にしたがうときの債券価格の期間構造方程式（(90)式）を

$$\frac{\partial q}{\partial\tau}=-\frac{1}{2}\sigma^2r^2\frac{\partial^2q}{\partial r^2}-(\beta(\mu-r)-\sigma^2\xi)\frac{\partial q}{\partial r}+rq \tag{143}$$

と表現し直し，(143)式からqと$\partial q/\partial r$を消去するべく

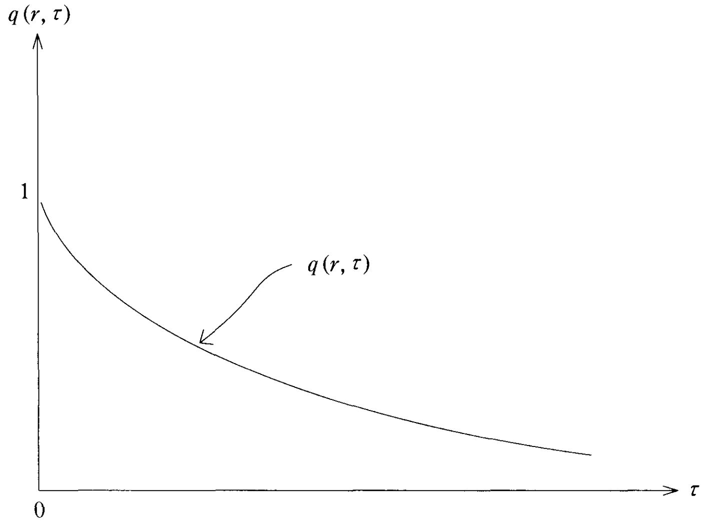

図-3

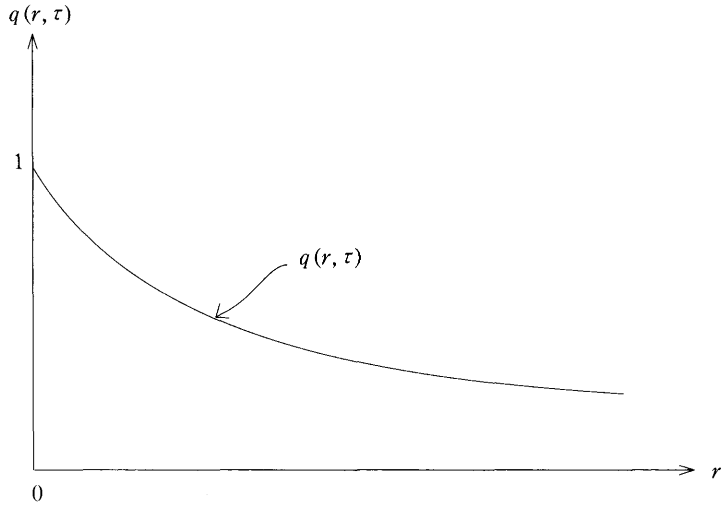

図-4

$$q(r,\tau)=Q(r,\tau)^{\alpha r+\beta\tau} \tag{144}$$

を再び定義し，上と同様の手続きを適用すれば

$$\frac{\partial Q}{\partial\tau}=-\frac{1}{2}\sigma^2r^2\left(\alpha^2Q+2\alpha\frac{\partial Q}{\partial r}+\frac{\partial^2Q}{\partial r^2}\right)-(\beta(\mu-r)-\sigma^2\xi)\left(\alpha Q+\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+(r-\beta)Q \tag{145}$$

$$=-\frac{1}{2}\sigma^2r^2\frac{\partial^2Q}{\partial r^2}-(\sigma^2(r^2\alpha-\xi))+\beta(\mu-r)\frac{\partial Q}{\partial r}$$
$$-\frac{1}{2}[\sigma^2r^2\alpha^2+(\beta(\mu-r)-\sigma^2\xi)\alpha+(r-\beta)]Q \tag{146}$$

がしたがう。このとき

$$\sigma^2(r^2\alpha-\xi)+\beta(\mu-r)=0 \tag{147}$$

$$\sigma^2 r^2\alpha^2+(\beta(\mu-r)-\sigma^2\xi)\alpha+(r-\beta)=0 \tag{148}$$

を同時に満たすα, βの下で(146)式の Q, $\partial Q/\partial r$ の項が消去される。このとき,

$$Q_\tau+c^2 Q_{rr}=0, \quad \text{where } c^2=\frac{1}{2}\sigma^2 r^2 \tag{149}$$

がしたがう。(149)式は,後退熱方程式(backward heat equation)と呼ばれる。(149)式は,利子率直物レートがOrnstein=Uhlenbeck過程にしたがうとき,債券価格の期間構造方程式が後退熱方程式に関係づけられることを意味している[20)]。

9) 連続的確率過程として,例えば,Vasicekは拡散過程とOrnstein=Uhlenbeck過程を,Dothanは,ドリフト係数(drift coefficient)なしの拡散過程,Dai=Singletonは,Affine過程を想定している。以下では,ドリフト係数なしの拡散過程が想定される。

10) 前節と記号法を異にすることに注意されたい。

11) かかる取引は,売りと買いを同時に行なうそれとなる。

12) Ornstein=Uhlenbeck過程の性質に関して,例えば,Dixit=Pindyck [9](Chap. 3),Shreve [31](Chap. 6) 参照。

13) Merton, *op. cit.*,(p. 389) 参照。

14) Merton, *op. cit.*,(p. 403),Dothan, *op. cit.*,(p. 62) 参照。

15) 上の期間構造方程式は,Dothan, *op. cit.*,(p. 62)の(5)式のそれに対応する。

16) Fourier変換を適用する試みとしてDothan, *op.cit.*, がある。そこでは,修正Bessel方程式(modified Bessel equation)が援用される。以下では,Minotani [26] の示唆によりながら,熱方程式(heat equation)を援用する。そこでの手続きの多くを同書に負う。Fourier変換の手続きについては,Kreyszig [19] (Part C) 参照。

17) Kreyszig, *op. cit.*,(p. 465) 参照。

18) 一般に,$f(x)$を密度函数とするとき,$F(\lambda)$は,特性函数(characteristic function)を与える。

19) $\partial^2 A/\partial\tau^2>0$, $\partial^2 B/\partial\tau^2>0$がしたがい,$A, B$ は逓減的凸函数の形状をもつ。

20) このとき,債券価格は,満期期日,直物レートに関して逓減的凹函数の形状をとることが推量される。

結びにかえて

元本不払い危険,すなわち,債務不履行危険(default risk)が存在しない情況の下で,満期までの期間の長さだけが異なる債券の利子率を満期までの期間の長さの函数とみなすとき,その債券の利子率を利子の期間構造と呼んだ。

期間構造を決定する要因をめぐる伝統的な議論と相異して現代のそれは,投資家の消費選択,ポートフォリオ選択を通じた需要と供給の関係から期間構造が決定されてくると理論づける。

以上において,各時点における利子率直物レートが離散的確率過程にしたがう場合と連続的確率過程にしたがう場合について,それぞれの期間構造のあり方をみた。

とりわけ,連続的な拡散過程にしたがう利子率直物レートが債券価格と完全相関関係に立つところでの債券価格の期間構造方程式が特定され,その解を成す債券価格フォーミュラが導かれた。そこでは,期間構造方程式を熱方程式に連動させ,Fourier変換の手法を用いて熱方程式を解くことによって債券価格フォーミュラが特定される方法がとられた。かかる債券価格フォーミュラの下で,満期期間が長期化するにつれ,また直物レートの初期値が上昇するにつれ,債券価格が逓減的に低下していく特性が確かめられた。しかるに,かかる性質は,利子率直物レートがしたがう確率過程

のあり方如何で内容を異にすることが推量され，その当否は実証的問題となることに注意しなければならない。

以上の議論を債務不履行危険が存在し，利子率直物レートがジャンプ（jump）をともなう確率過程にしたがう場合へ拡張することは，興味深い発展化の方向であろう。

References

[1] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, 1973.

[2] A. Buse, "Hicks, Lutz, Meiselman and the Expectations Theory," *Review of Economic Studies*, 37, 1970.

[3] A. Černý, *Mathematical Techniques in Finance*, Princeton University Press, 2004.

[4] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, Jr., and S. A. Ross, "A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 36, 1981.

[5] ________, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53, 1985.

[6] J. M. Culbertson, "The Term Structure of Interest Rates," *Quarterty Journal of Economics*, 71, 1957.

[7] ________, "The Interest Rates Structure: Toward Completion of the Classical System, " in F. H. Hahn and F. P. B. Brechling (eds.), *The Theory of Interest Rates*, Macmillan, 1965.

[8] Q. Dai and K. J. Singleton, "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, 55, 2000.

[9] A. K. Dixit and R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

[10] J. C. Dodds and J. L. Ford, *Expectations, Uncertainty and the Term Structure of Interest Rates*, Martin Robertson, 1974.

[11] L. U. Dothan, "On the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, 6, 1978.

[12] T. W. Epps, *Quantitative Finance*, John Wiley, 2009.

[13] I. Fisher, "Appreciation and Interests," *Publications of the American Economic Association*, 11, 1896.

[14] D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation," *Journal of Financial and Quantitaive Analysis*, 25, 1990.

[15] ________, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, 60, 1992.

[16] J. P. Hicks, *Value and Capital*, Oxford University Press, 1946.

[17] ________, "Liquidity, " *Economic Journal*, 72, 1962.

[18] T. S. Y. Ho and S-B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41, 1986.

[19] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition, John Wiley, 2006.

[20] J. B. Long, Jr., "Consumption-Investment Decision and Equilibrium in the Securities Market," in M. C. Jensen (ed.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, 1972.

[21] ________, "Stock Prices, Inflation and the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, 1, 1974.

[22] F. A. Lutz, "The Structures of Interest Rates," *Quarterly Journal of Economics*, 54, 1940.

[23] D. Meiselman, *The Term Structure of Interest Rates*, Prentice-Hall, 1962.

[24] A. V. Mel'nikov, *Financial Markets: Stochastic Analysis and the Pricing of Derivative Securities*, American Mathematical Society, 1999 (originally in Russian, 1977).

[25] R. C. Merton, "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Models," *Journal of Economic Theory*, 3, 1971.

[26] C. Minotani, *Black-Scholes Model*, Toyokeizai Shimposha, 2000 (in Japanese).

[27] S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell, 1997.

[28] G. Pye, "A Markov Model of the Term Structure," *Quarterly Journal of Economics*, 80, 1966.

[29] S. F, Richard, "An Arbitrage Model of the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Financial Economics*, 6, 1978.
[30] R. Roll, "Investment Diversification and Bond Maturity," *Journal of Finance*, 26, 1971.
[31] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.
[32] D. A. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5, 1977.